



# ***Teoria dos Grafos e Logística***

## ***Exemplos de Aplicações***

**Bruno Thomé de Abrantes**

# Grafos – Definição



**Grafo**: é uma estrutura matemática  $G = (X,A)$ , onde:

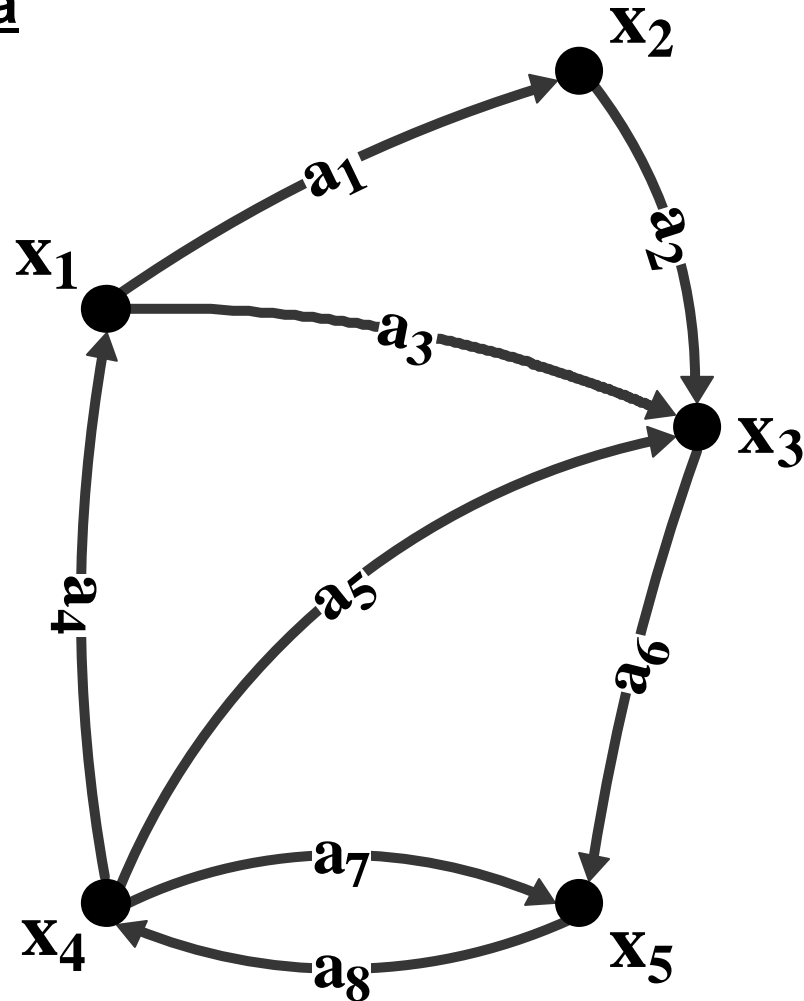
- $X$  = conjunto de nós       $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ ;
- $A$  = conjunto de arcos       $A = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$ ;

Com cada arco  $a_k$  ? A sendo definido por um par de nós do conjunto  $X$ , isto é  $a_k = (x_i, x_j)$ .

A esses arcos são associados valores, que normalmente estão associados ao custo de se percorrer esse arco, e os algoritmos visam cumprir determinada tarefa com o menor custo total possível.

# Grafos – Representações

## Forma Gráfica



# Grafos – Representações



## Forma Algébrica (exemplos)

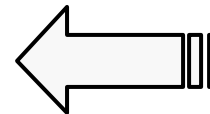
Matriz de Adjacência



$A =$

$$\begin{array}{c} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \\ X_5 \end{array} \begin{bmatrix} X_1 & X_2 & X_3 & X_4 & X_5 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{array}{c} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \\ X_5 \end{array} \begin{bmatrix} X_1 & X_2 & X_3 & X_4 & X_5 \\ 0 & c_1 & c_3 & & \\ & 0 & c_2 & & \\ & & 0 & & c_6 \\ c_4 & & c_5 & 0 & c_7 \\ & & & c_8 & 0 \end{bmatrix}$$



Matriz de Custos



# ***Exemplos de Aplicações***

# Árvores

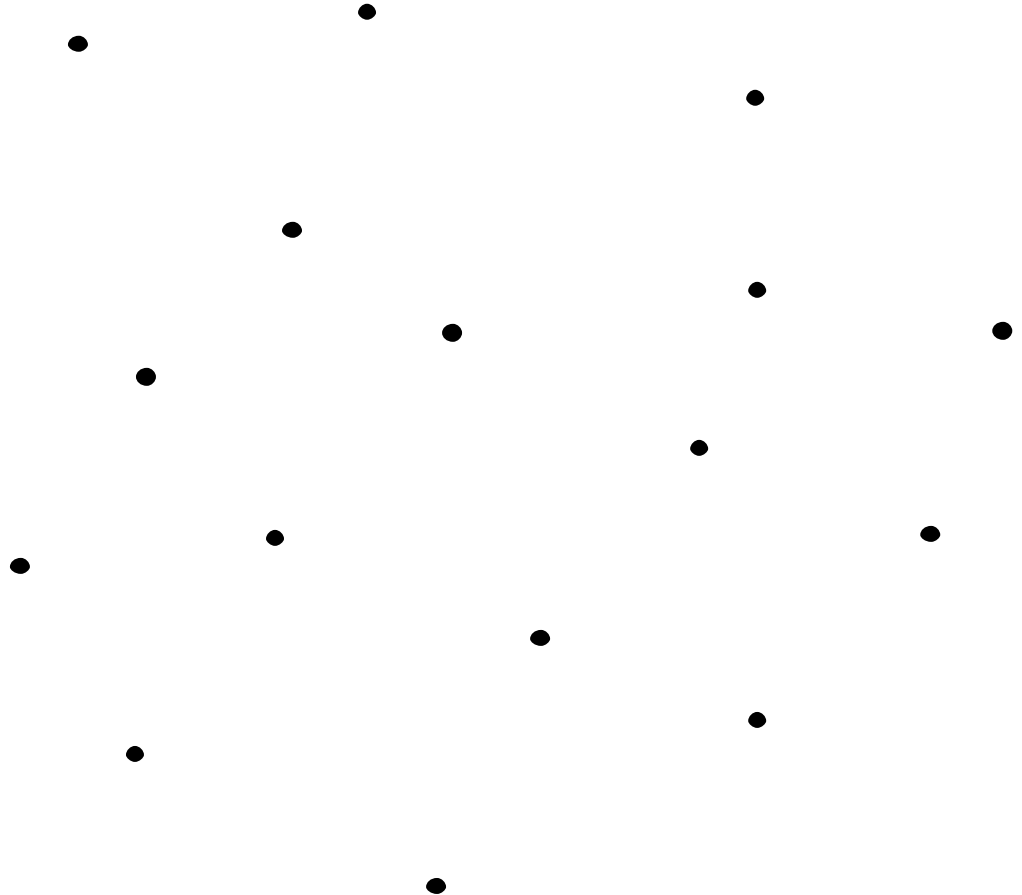


## Problema:

Determinar uma árvore expandida sobre o grafo que represente o menor custo total.

## Exemplos:

- Dutos ligando refinarias;
- Instalação de cabos para distribuição de energia elétrica;
- Distribuição de gás no Rio;
- etc...



# Árvores



## Problema:

Determinar uma árvore expandida sobre o grafo que represente o menor custo total.

## Exemplos:

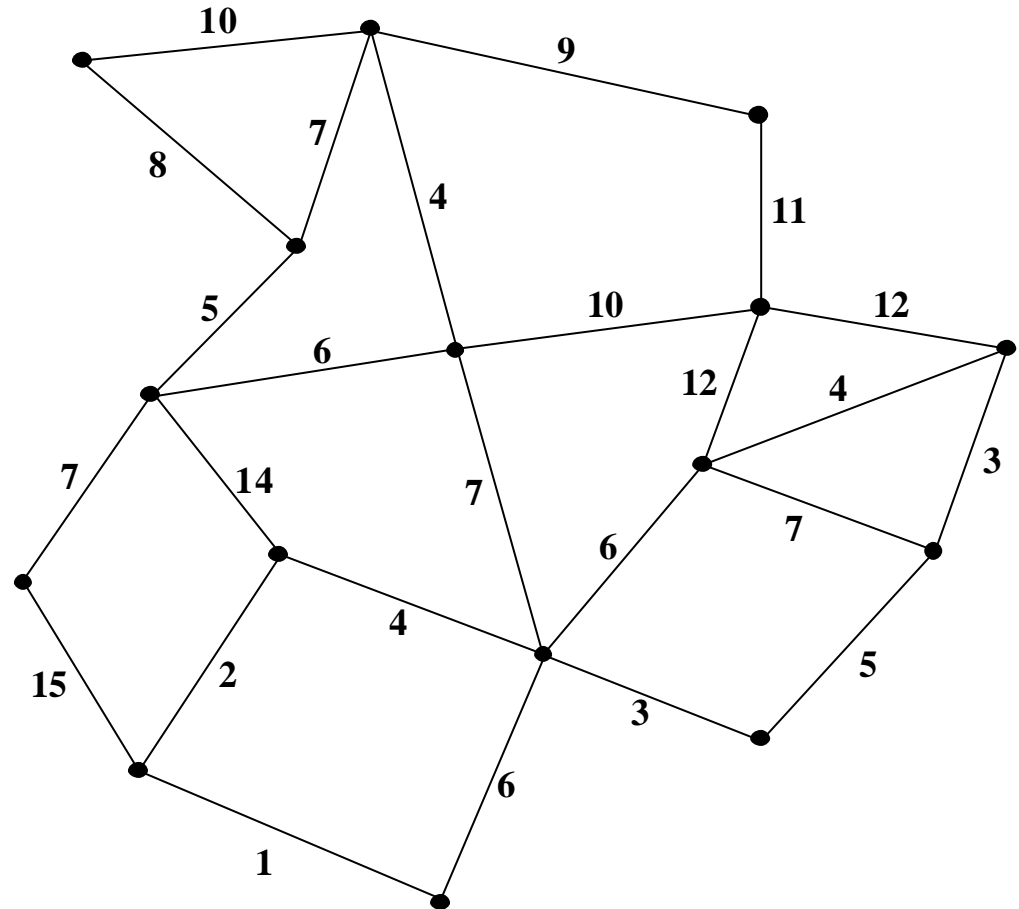
- Dutos ligando refinarias;
- Instalação de cabos para distribuição de energia elétrica;
- Distribuição de gás no Rio;
- etc...

## Curiosidade:

$$n = 16$$

$$m = 25$$

$$C_{25}^{15} = \frac{25!}{15! \cdot 10!} = 3.268.760$$



# Árvores

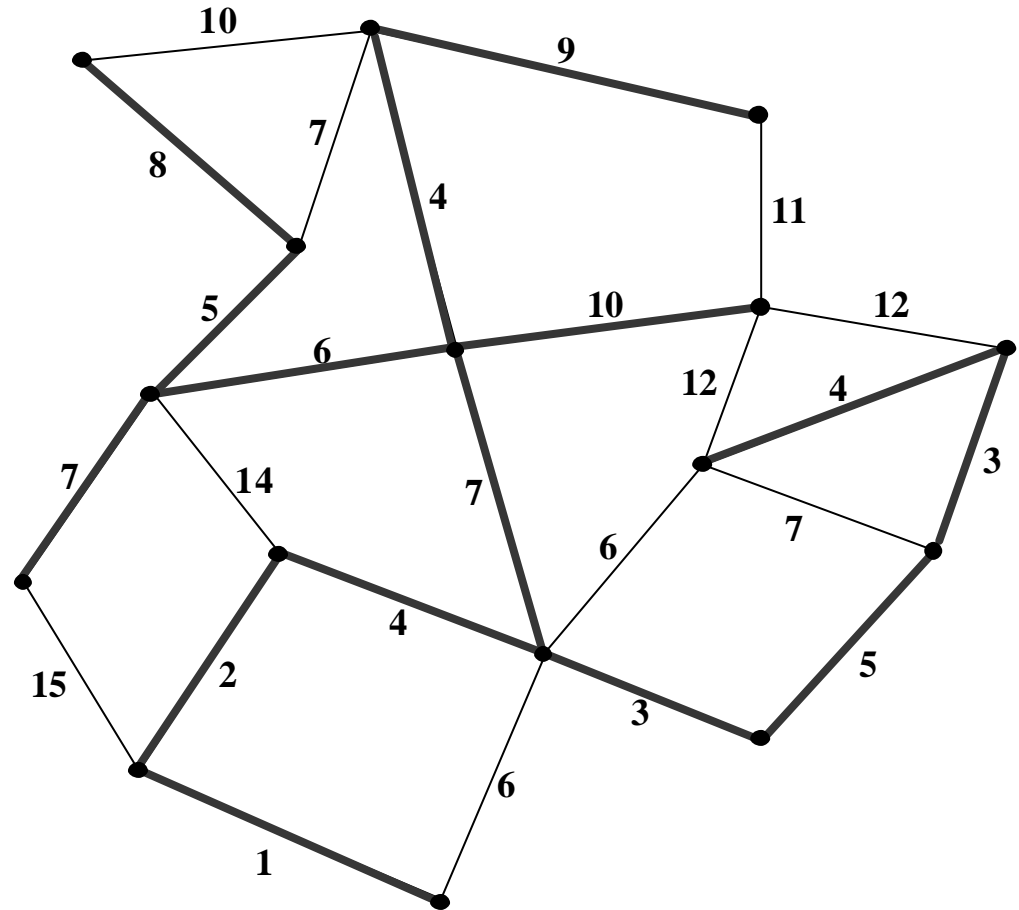


## Problema:

Determinar uma árvore expandida sobre o grafo que represente o menor custo total.

## Exemplos:

- Dutos ligando refinarias;
- Instalação de cabos para distribuição de energia elétrica;
- Distribuição de gás no Rio;
- etc...



Obs: Solução qualquer

# Fluxo em Redes

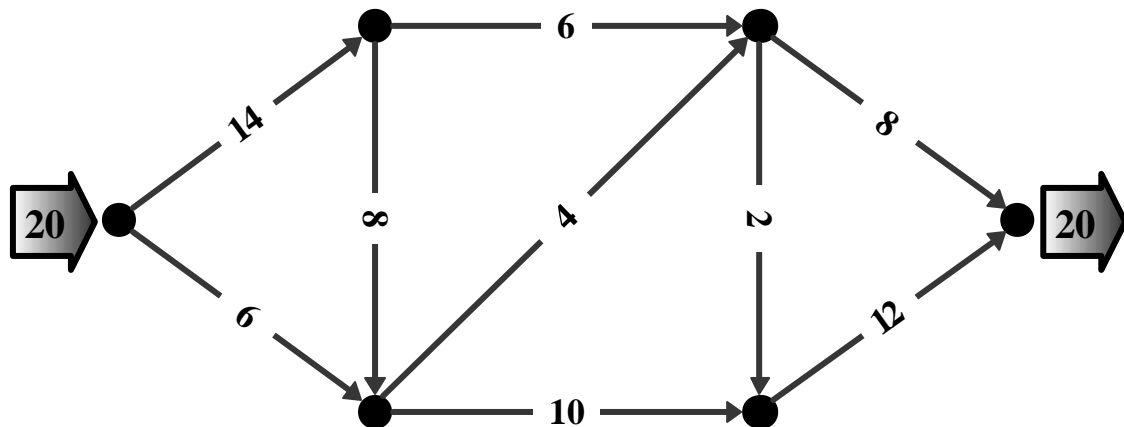
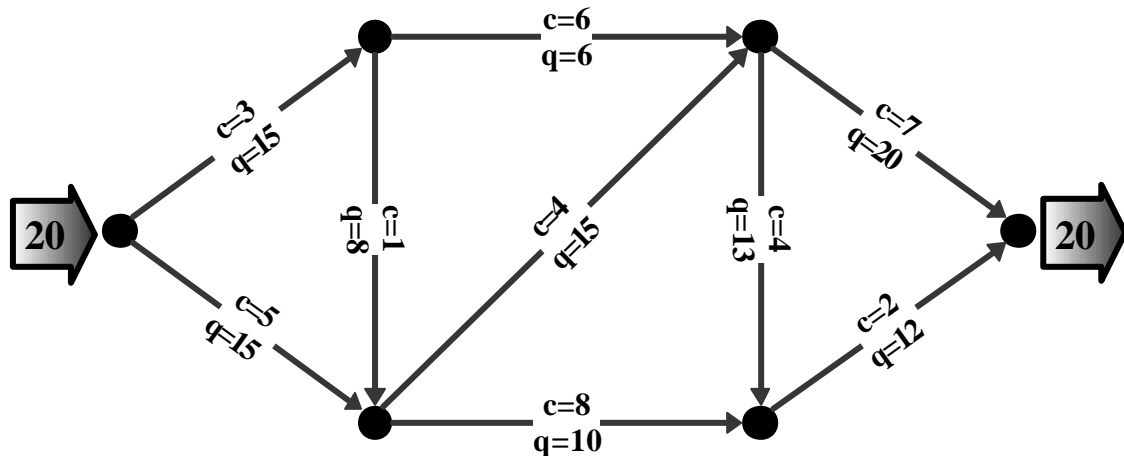
## Problema:

Encontrar um fluxo viável de mínimo custo para determinada demanda.

## Exemplos:

- Cadeia Têxtil (Li-Fung);
- Processo Produtivo;
- Transporte Intermodal;
- etc...

Com o algoritmo correto, após 6 iterações manuais chegamos na Solução Ótima!  
( $C_{\min} = 300$ )



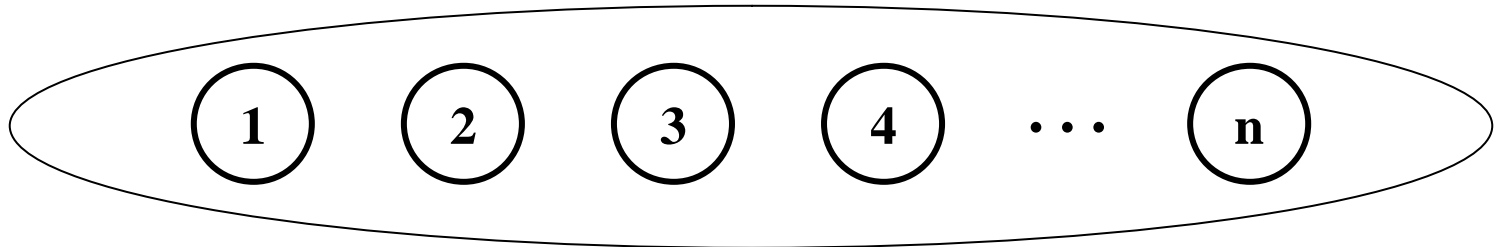
# Cobertura de Conjuntos



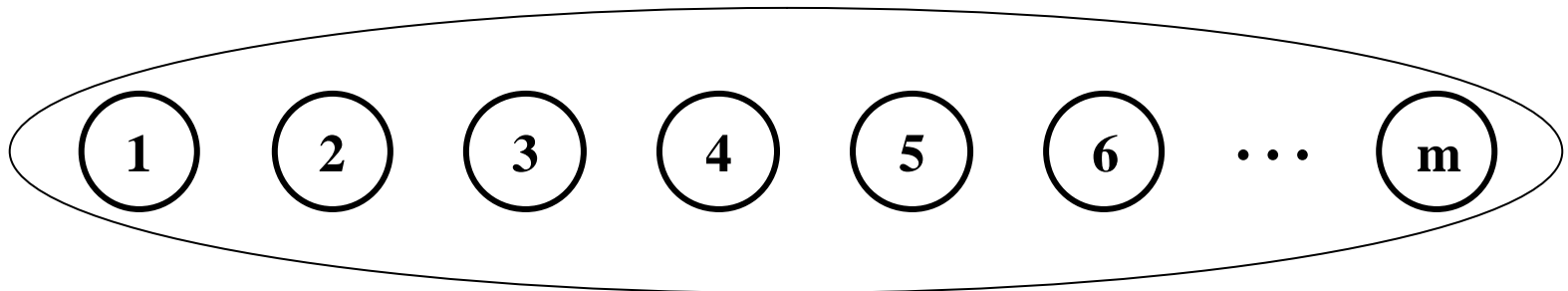
## Problema:

Definir um grupo de colunas que cubra as  $m$  linhas com custo mínimo.  
(obs: custos associados às colunas).

**n COLUNAS**



**m LINHAS**

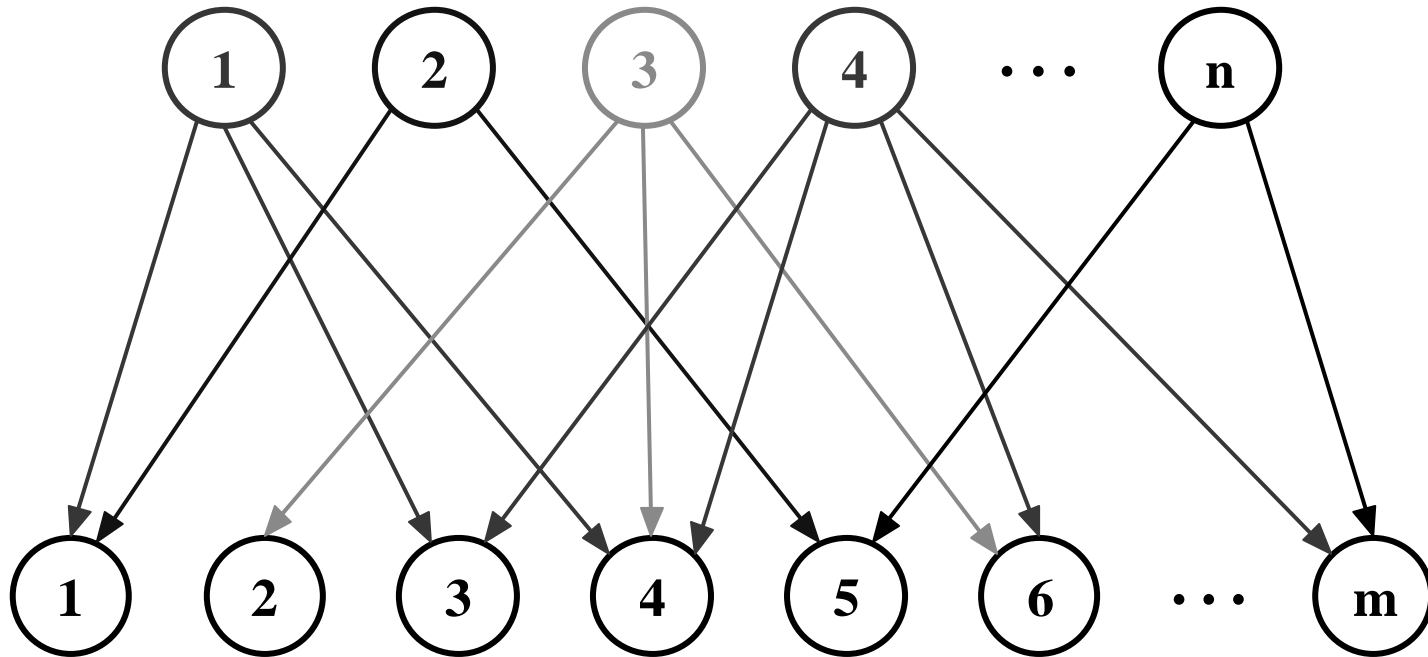


# Cobertura de Conjuntos



## Exemplos:

- Escolha de fornecedores;
- Seleção de transportadoras (aéreas, terrestres...);
- Contratação de motoristas;
- etc...

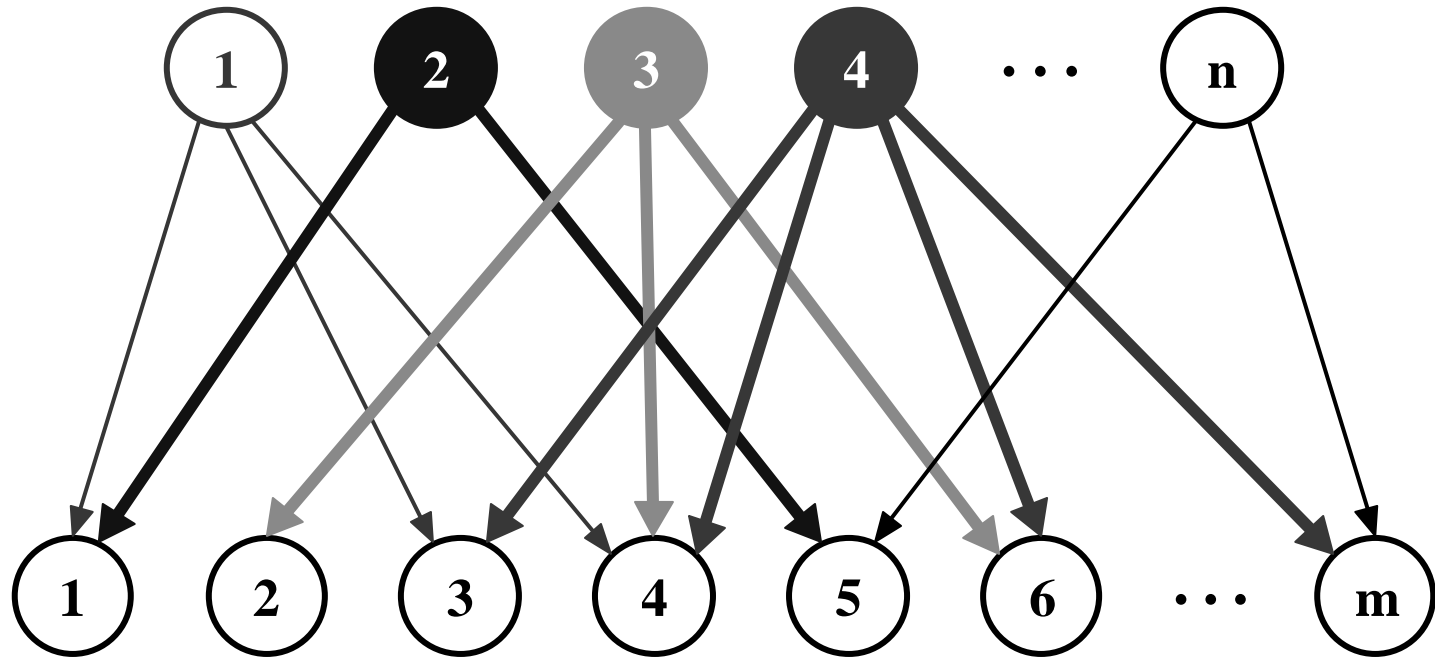


# Cobertura de Conjuntos



## Exemplos:

- Escolha de fornecedores;
- Seleção de transportadoras (aéreas, terrestres...);
- Contratação de motoristas;
- etc...



Obs: Solução qualquer

# Localização de $p$ - medianas

## Problema:

Localizar, dentre os nós do grafo,  $p$  medianas que minimizem a soma ponderada (pelas demandas dos nós) das distâncias entre os nós e suas respectivas medianas.

## Exemplo:

- Localização de Centros de Distribuição;
- Localização de escolas;
- etc...

Obs: Uso Alternativo ? Determinação de áreas de influência.

# Rodar programa

# Caminhos Mínimos



## Problema:

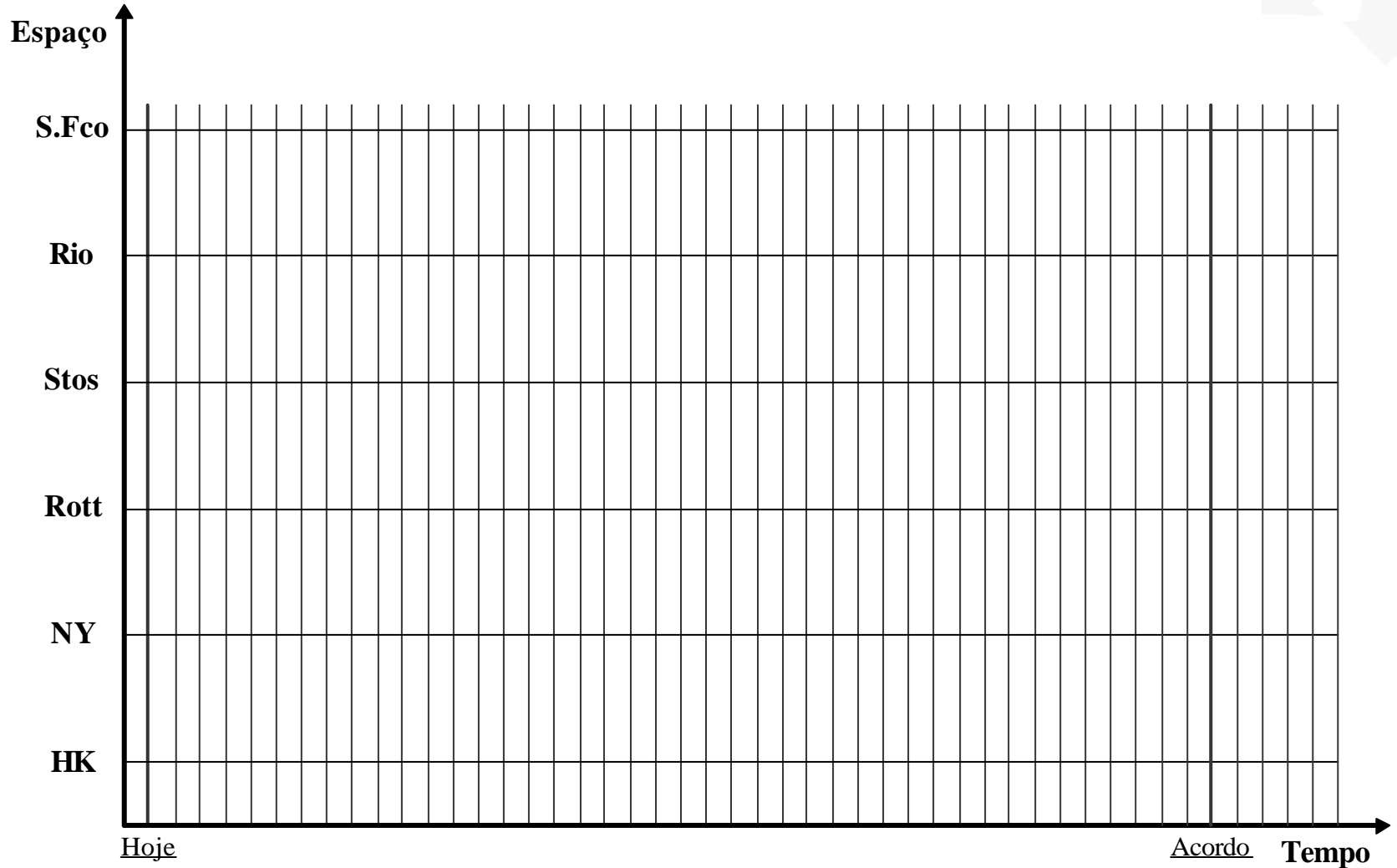
Encontrar um caminho mínimo entre um par de nós ( $s$ ,  $t$ ) do grafo.

Alternativamente, pode-se querer encontrar o caminho mínimo entre o nó  $s$  e todos os demais nós do grafo.

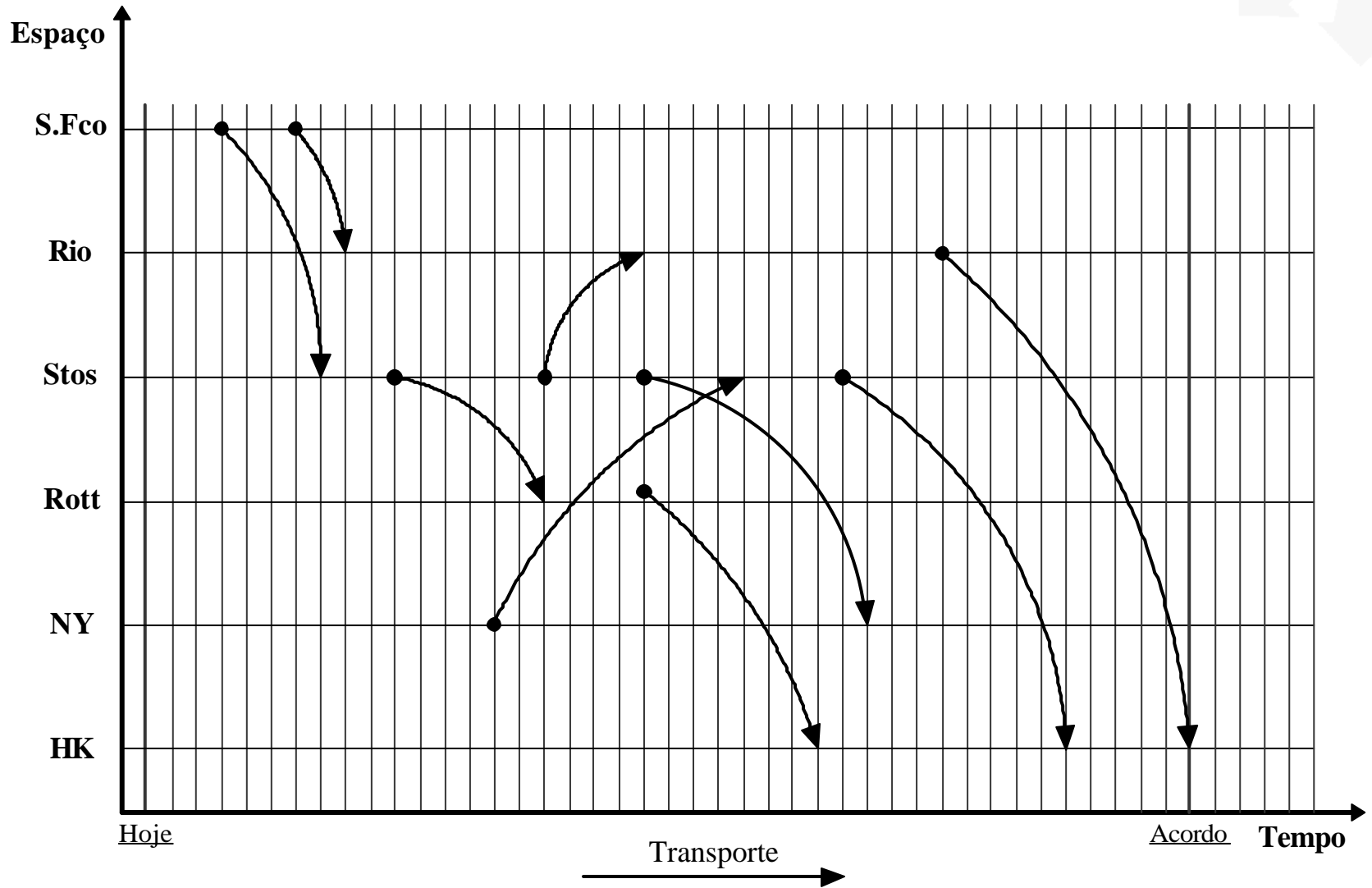
## Exemplos:

- Menor caminho entre duas cidades (distância e tempo);
- Alternativamente: Matriz Origem-Destino (mapas);
- Operadores Logísticos;
- etc...

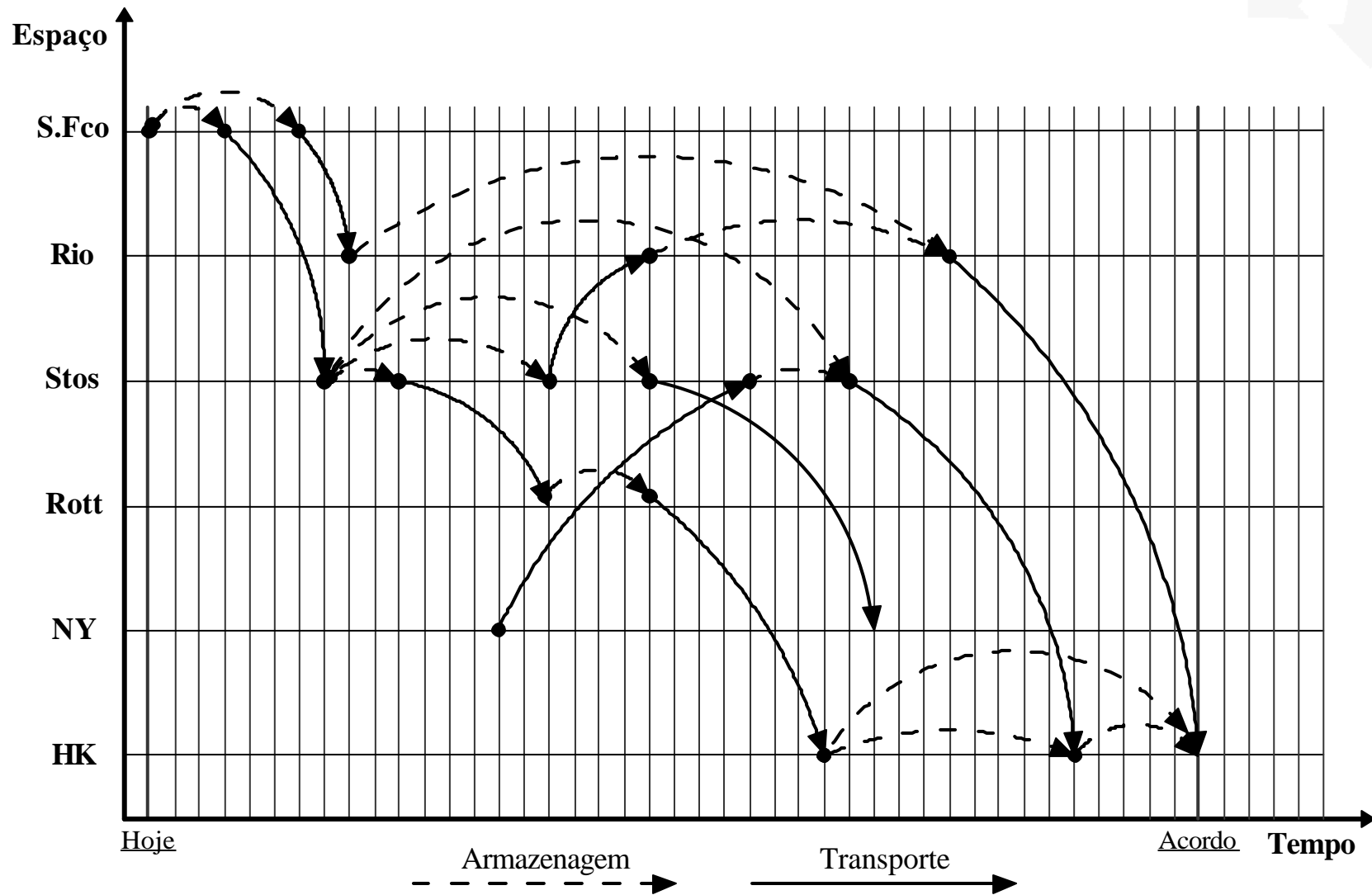
# Caminhos Mínimos



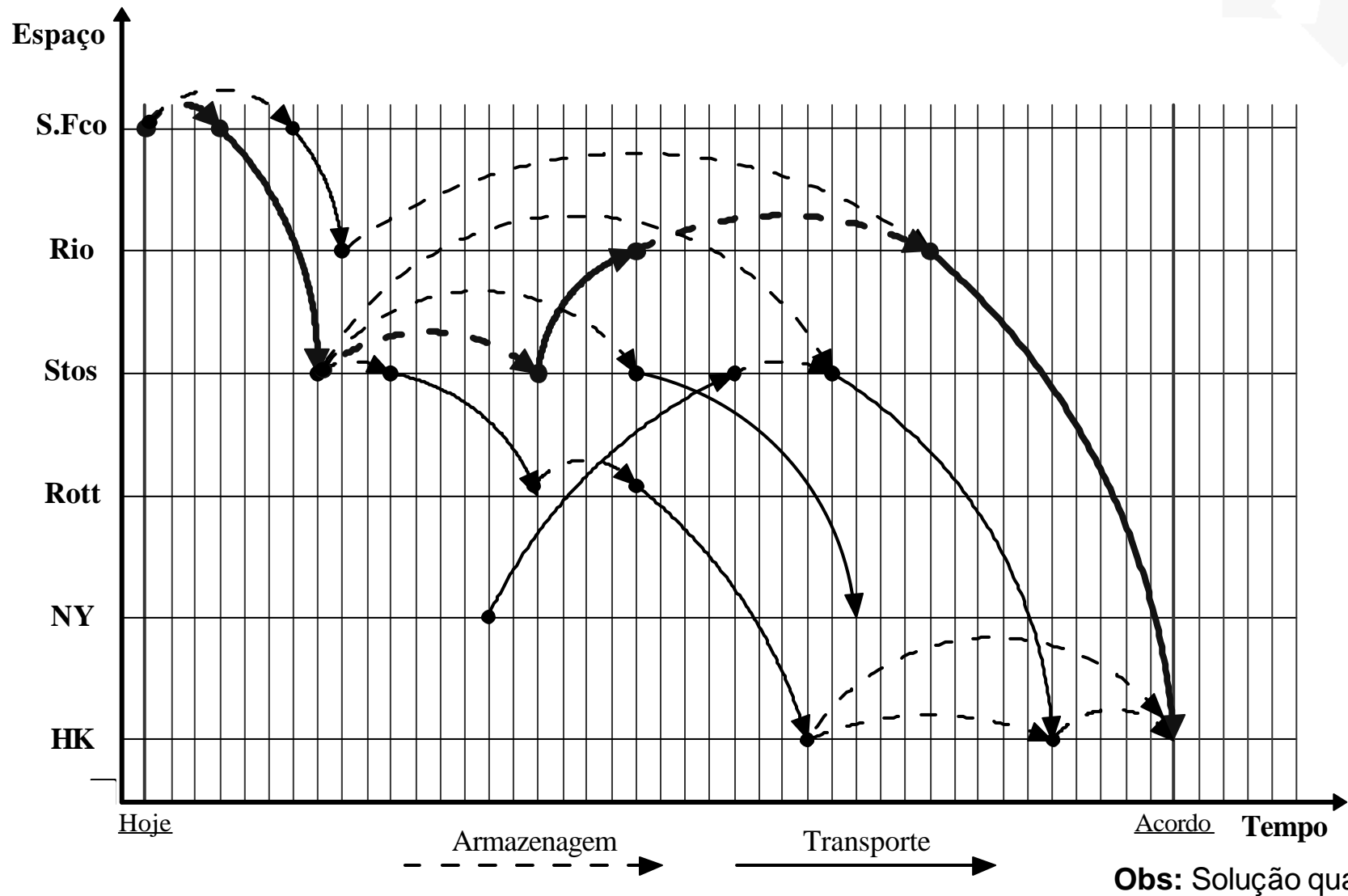
# Caminhos Mínimos



# Caminhos Mínimos



# Caminhos Mínimos



# Roteirização

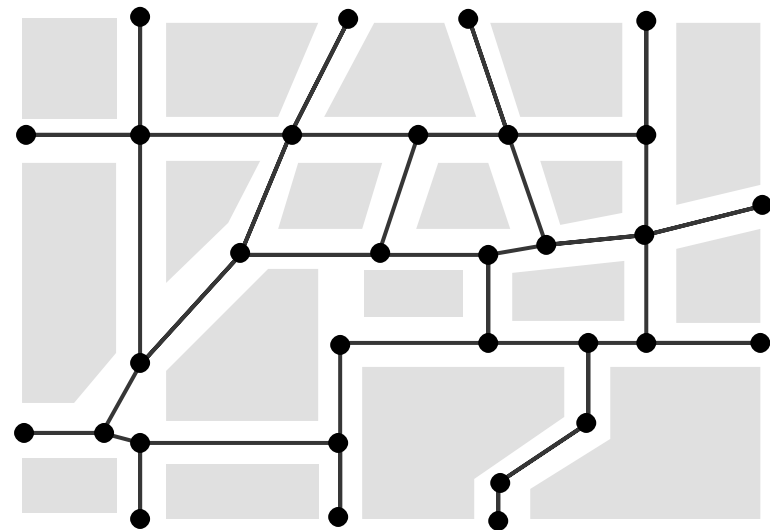
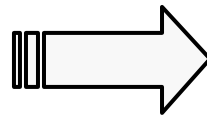
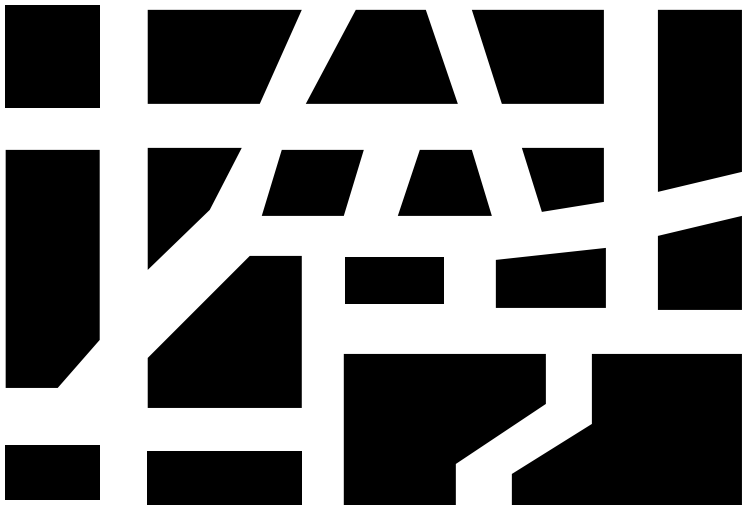
## Problema do Carteiro Chinês

### Problema:

Definir um roteiro que passe por todos os **arcos** de um grafo com custo mínimo.

### Exemplos:

- Coleta de Lixo;
- Entrega / Coleta de Correspondências (Correios);
- Limpeza de ruas (caminhão com escovas)
- etc...



# Roteirização

## Problema do Caixeiro Viajante

### Problema:

Definir um roteiro que passe por todos os **nós** de um grafo com custo mínimo.

### Exemplos:

- Entrega de encomendas;
- Separação de pedidos em grandes estantes com Transelevador;
- Pontos de solda num circuito elétrico;
- etc...

# Rodar programa

# Roteirização de Veículos



## Problema:

Alocar para cada veículo um roteiro onde o somatório das demandas dos nós atendidos por esse veículo seja compatível com a capacidade do mesmo.

## Soluções Alternativas:

- Cluster First Route Second:
  - por exemplo:  $p$ -medianas capacitado + PCV.
- Route First Cluster Second:
  - TSP + segmentação da rota.

# Roteirização de Veículos

## Cluster First Route Second

### Problema:

Distribuição de material publicitário em 1.113 postos de combustível da rede Texaco espalhados por 682 cidades brasileiras em 22 estados diferentes. Todo o material deveria sair de Florianópolis.

### Metodologia:

- Agrupamentos com o algoritmo de p-medianas até que as demandas de cada grupo estivessem compatíveis com as capacidades dos caminhões.
  - Algoritmo de *Teitz, M. B. & Bart, P* (1968)
- Aplicação do algoritmo para a definição dos roteiros de cada grupo
  - Algoritmo: “Guided Local Search” – *Voudouris* (1988)

# Roteirização de Veículos

## Cluster First Route Second



### Solução Proposta:

- 9 equipes de distribuição

	Média por Equipe
Cidades Atendidas	75,78
Postos Atendidos	123,67
Carga Movimentada	6,18
Km rodados (rodovias)	6160,33
Km rodados (cidades)	616,03
Duração esperada (dias)	49,47
Total Km rodados	6776,37

- 2 equipes de transferência

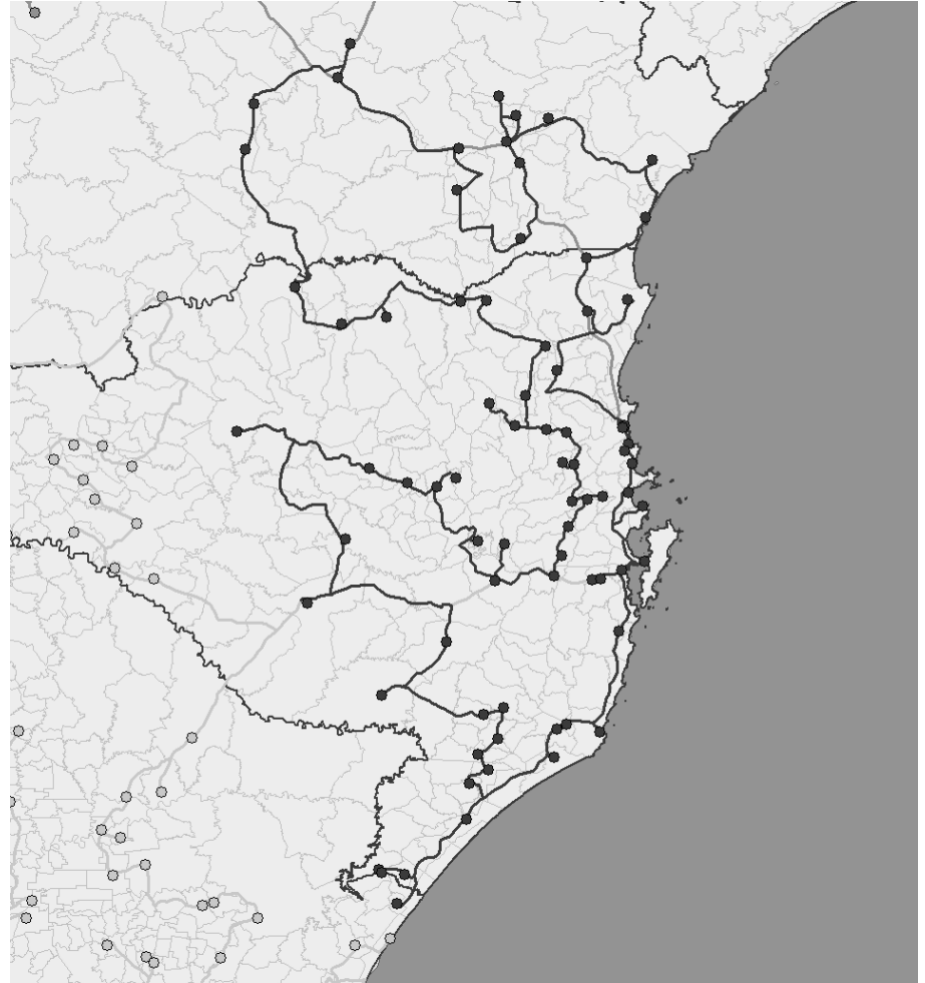


# Roteirização de Veículos

## Cluster First Route Second



**Zoom na equipe 9**



# Referências



- ✓ CHRISTOFIDES, NICOS (1975) - Graph Theory: An Algorithmic Approach
- ✓ Notas de aula: Disciplina de Pesquisa Operacional III da UFSC  
(Prof. Sérgio Fernando Mayerle)



***Dúvidas?***  
***Perguntas?***

**Muito Obrigado!!!**

**Bruno Thomé de Abrantes**